

Metody optymalizacji



dr inż. Paweł Zalewski
Akademia Morska w Szczecinie

Optymalizacja - definicje:

i eksploatacji centr **Bach**

teorii obsługi masow mater

metody	szczegółów	matematycznych	wartości
--------	------------	----------------	----------

matematyk A.J. Chinc

Analiza funkcjonalna: dział matematyki powstały w XX w., zajmujący się badaniem faktów z różnorodnych dziedzin za pomocą metod matematycznych (równania całkowe, równania różniczkowe, algebra liniowa i inne). Analiza funkcjonalna znalazła szerokie zastosowanie w różnych dziedzinach wiedzy, jej rozwojowi zasłużyli się matematycy polscy, m.in.: S. Banach (uważany za jej twórcę), H. Steinhaus, S. Mazur, W. Orlicz, J.P. Schauder.

Rach

mater

wartos

Rachunek wariacyjny jest jedną z podstawowych

metod fizyki matematycznej.

Optymalizacja liniowa – programowanie liniowe:

Rozwiązanie zadania programowania liniowego metodą **SIMPLEX**:

Zadanie należy sprowadzić do **postaci kanonicznej**, to znaczy do postaci, w której poszukujemy **maksimum funkcji przy ograniczeniach równościowych i wszystkich zmiennych nieujemnych**, przy czym w tablicy ograniczeń musi dać się wyróżnić macierz jednostkowa, a prawe strony muszą być dodatnie.

W przypadku poszukiwania **minimum funkcji** dla zależności liniowych:

$$\min f(x) = \max(-f(x)),$$

gdzie x jest wektorem argumentów funkcji f .

Aby ograniczenia przekształcić w równości, **dodajemy do lewych stron (lub odejmujemy) zmienne uzupełniające o wartościach dodatnich**.

Optymalizacja liniowa – programowanie liniowe:

Przykład rozwiązania zadania optymalizacyjnego metodą **SIMPLEX**:

Znaleźć minimum funkcji:

$$f(x) = -2x_1 - 3x_3$$

przy ograniczeniach:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3,$$

$$3x_2 + 4x_3 \leq 4,$$

$$2x_2 + x_3 = 1,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Optymalizacja liniowa – programowanie liniowe:

Przykład rozwiązania zadania optymalizacyjnego metodą **SIMPLEX**:

Poszukiwanie minimum funkcji liniowej $f(x)$ jest równoważne poszukiwaniu maksimum tej funkcji wziętej z przeciwnym znakiem, a więc funkcji:

$$f_1(x) = -f(x) = 2x_1 + 3x_3$$

Ograniczenia przyjmą postać:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3,$$

$$3x_2 + 4x_3 + x_5 = 4,$$

$$2x_2 + x_3 = 1,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Optymalizacja liniowa – programowanie liniowe:

Przykład rozwiązania zadania optymalizacyjnego metodą **SIMPLEX**:

Macierz ograniczeń, czyli tablica współczynników przy argumentach x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 w trzech równaniach ograniczeń ma postać:

$$O = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

W tablicy tej nie można jednak jeszcze wyróżnić **macierzy jednostkowej**:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdyż brakuje w niej wektora kolumnowego: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Optymalizacja liniowa – programowanie liniowe:

Przykład rozwiązania zadania optymalizacyjnego metodą **SIMPLEX**:

Po lewej stronie trzeciego ograniczenia trzeba więc dodać zmienną „sztuczną” x_6 , która ten brak wyrówna.

Aby zmienna x_6 nie miała wpływu na rozwiązanie i aby można ją było szybko wyeliminować z zadania w trakcie jego rozwiązywania, uzupełniamy funkcję celu o składnik $-wx_6$ z bardzo dużym współczynnikiem dodatnim w . W ten sposób niejako „pogarszamy” znacznie funkcję celu „oddalając” jej wartość (znacznie zmniejszając) od prawdziwego maksimum.

Optymalizacja liniowa – programowanie liniowe:

Przykład rozwiązania zadania optymalizacyjnego metodą **SIMPLEX**:

Zadanie przyjmie więc postać (kanoniczną) wyznaczenia maksimum funkcji celu $f_1(x)$:

$$\max f_1(x) = 2x_1 + 3x_3 - wx_6$$

Przy ograniczeniach:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3,$$

$$3x_2 + 4x_3 + x_5 = 4,$$

$$2x_2 + x_3 + x_6 = 1,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Optymalizacja liniowa – programowanie liniowe:

Przykład rozwiązania zadania optymalizacyjnego metodą **SIMPLEX**:

Wartości c_i dla jednostkowych wektorów A_i		Wektory współczynników ograniczeń						
Współczynniki występujące przy zmiennych x_i w funkcji celu $f_1(x)$								
Baza	c_b	b	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Współczynniki lewych stron ograniczeń			1	2	1	1	0	0
A_5	0	4	0	3	4	0	1	0
A_6	-w	1	0	2	1	0	0	1
$\sum (c_b \times b)$			0	$4 - 2w$	$-1 - w$	2	0	0

Iloczyn skalarny $c_b \times b$ określa **wartość funkcji celu w danym kroku**, wektor b **wartości zmiennych bazowych x_i** .

Optymalizacja liniowa – programowanie liniowe:

Przykład rozwiązania zadania optymalizacyjnego metodą **SIMPLEX**:

Najmniejsza (najbardziej ujemna) wartość wskaźnika w dolnym wierszu wyznacza wektor, jaki w następnym kroku wprowadzimy do bazy. W naszym przypadku będzie to wektor A_2 . Rozwiązanie osiągniemy, gdy nie będzie już wskaźnika o wartości ujemnej.

Wektor usuwany z bazy wyznacza się obliczając ilorazy charakterystyczne dla wszystkich dodatnich elementów wektora wprowadzanego do bazy (A_2) według zależności:

$$r_{01} = \frac{b_{A_1}}{A_{2A_1}} = \frac{3}{2},$$

$$r_{05} = \frac{b_{A_5}}{A_{2A_5}} = \frac{4}{3},$$

$$r_{06} = \frac{b_{A_6}}{A_{2A_6}} = \frac{1}{2}$$

Optymalizacja liniowa – programowanie liniowe:

Przykład rozwiązania zadania optymalizacyjnego metodą **SIMPLEX**:

Z bazy należy usunąć wektor, którego element występuje w ilorazie o najmniejszej wartości spośród wyznaczonych – w omawianym przykładzie będzie to wektor A_6 ($r_{06} = r_0 = 1/2$)

Ponieważ jest to wektor odpowiadający zmiennej sztucznej, usuwamy go nie tylko z bazy, ale z całej tablicy simplexów.

Wyznaczony iloraz r_0 podaje jednocześnie nową wartość elementu wektora b w wierszu wektora wprowadzanego do bazy ($b'_{A_2} = r_0$, gdyż wprowadzamy wektor A_2). Pozostałe dwa nowe elementy wektora b wyznacza się z zależności:

$$b'_{A_1} = b_{A_1} - r_0 A_{2A_1} = 3 - \frac{1}{2} \times 2 = 2,$$

$$b'_{A_5} = b_{A_5} - r_0 A_{2A_5} = 4 - \frac{1}{2} \times 3 = \frac{5}{2}$$

Optymalizacja liniowa – programowanie liniowe:

Przykład rozwiązania zadania optymalizacyjnego metodą **SIMPLEX**:

Wprowadzany do bazy wektor przyjmuje wartości jednostkowe, a wskaźniki odpowiadające wektorom bazowym (dolny wiersz tabeli simplexów) będą zawsze wynosić 0. Wartość funkcji celu wzrasta do 4.

C_i			2	0	3	0	0
Baza	c_b	b'	A_1'	A_2'	A_3'	A_4'	A_5'
A_1	2	2	1	0			0
A_5	0	$\frac{5}{2}$	0	0			1
A_2	0	$\frac{1}{2}$	0	1			0
Wskaźniki		4	0	0			0

Optymalizacja liniowa – programowanie liniowe:

Przykład rozwiązania zadania optymalizacyjnego metodą **SIMPLEX**:

Następnie należy wyznaczyć ilorazy kolumnowe dla wektorów poza-bazowych:

$$r_{36} = A_{3A_2}' = \frac{A_{3A_6}}{A_{2A_6}} = \frac{1}{2},$$

$$r_{46} = A_{4A_2}' = \frac{A_{4A_6}}{A_{2A_6}} = \frac{0}{2} = 0$$

Optymalizacja liniowa – programowanie liniowe:

Przykład rozwiązania zadania optymalizacyjnego metodą **SIMPLEX**:

c_i			2	0	3	0	0
Baza	c_b	b'	A_1'	A_2'	A_3'	A_4'	A_5'
A_1	2	2	1	0			0
A_5	0	$\frac{5}{2}$	0	0			1
A_2	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0
Wskaźniki		4	0	0			0

Optymalizacja liniowa – programowanie liniowe:

Przykład rozwiązania zadania optymalizacyjnego metodą **SIMPLEX**:

Na podstawie otrzymanych ilorazów kolumnowych wyznacza się brakujące elementy tablicy:

$$A'_{3A_1} = A_{3A_1} - r_{36}A_{2A_1} = 1 - \frac{1}{2} \times 2 = 0,$$

$$A'_{4A_1} = A_{4A_1} - r_{46}A_{2A_1} = 1 - 0 \times 2 = 1,$$

$$A'_{3A_5} = A_{3A_5} - r_{36}A_{2A_5} = 4 - \frac{1}{2} \times 3 = \frac{5}{2},$$

$$A'_{4A_5} = A_{4A_5} - r_{46}A_{2A_5} = 0 - 0 \times 3 = 0$$

Optymalizacja liniowa – programowanie liniowe:

Przykład rozwiązania zadania optymalizacyjnego metodą **SIMPLEX**:

Druga tablica simplexów:

c_i			2	0	3	0	0
Baza	c_b	b	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	2	2	1	0	0	1	0
A_5	0	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	0	1
A_2	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0
Wskaźniki		4	0	0	-3	2	0

Optymalizacja liniowa – programowanie liniowe:

Przykład rozwiązania zadania optymalizacyjnego metodą **SIMPLEX**:

Najmniejsza (najbardziej ujemna) wartość wskaźnika w dolnym wierszu wyznacza wektor, jaki w następnym kroku wprowadzimy do bazy. W naszym przypadku będzie to wektor A_3 .

Wektor usuwany z bazy wyznacza się obliczając ilorazy charakterystyczne dla wszystkich dodatnich elementów wektora wprowadzanego do bazy (A_3):

$$r_{01} = \frac{b_{A_1}}{A_{3A_1}} = \frac{2}{0},$$

$$r_{05} = \frac{b_{A_5}}{A_{3A_5}} = \frac{5/2}{5/2} = 1,$$

$$r_{02} = \frac{b_{A_2}}{A_{3A_2}} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$

Optymalizacja liniowa – programowanie liniowe:

Przykład rozwiązania zadania optymalizacyjnego metodą **SIMPLEX**:

Z bazy należy usunąć wektor, którego element występuje w ilorazie o najmniejszej wartości spośród wyznaczonych – mamy dwa takie wektory: A_2 i A_5 . Wybieramy jeden z nich np. A_2 ($r_{02} = r_0 = 1$)

Wyznaczony iloraz r_0 podaje jednocześnie nową wartość elementu wektora b w wierszu wektora wprowadzanego do bazy ($b'_{A3} = r_0$, gdyż wprowadzamy wektor A_3). Pozostałe dwa nowe elementy wektora b wyznacza się z zależności:

$$b'_{A_1} = b_{A_1} - r_0 A_{3A_1} = 2 - 1 \times 0 = 2,$$

$$b'_{A_5} = b_{A_5} - r_0 A_{3A_5} = \frac{5}{2} - 1 \times \frac{5}{2} = 0$$

Optymalizacja liniowa – programowanie liniowe:

Przykład rozwiązania zadania optymalizacyjnego metodą **SIMPLEX**:

Wprowadzany do bazy wektor przyjmuje wartości jednostkowe, a wskaźniki odpowiadające wektorom bazowym będą zawsze wynosić 0. Wartość funkcji celu wzrasta do 7.

C_i			2	0	3	0	0
Baza	c_b	b'	A_1'	A_2'	A_3'	A_4'	A_5'
A_1	2	2	1		0		0
A_5	0	0	0		0		1
A_3	3	1	0		1		0
Wskaźniki		7	0		0		0

Optymalizacja liniowa – programowanie liniowe:

Przykład rozwiązania zadania optymalizacyjnego metodą **SIMPLEX**:

Następnie należy wyznaczyć ilorazy kolumnowe dla wektorów poza-bazowych:

$$r_{22} = A_{2A_3}' = \frac{A_{2A_2}}{A_{3A_2}} = \frac{1}{\cancel{1/2}} = 2,$$

$$r_{42} = A_{4A_3}' = \frac{A_{4A_2}}{A_{3A_2}} = \frac{0}{\cancel{1/2}} = 0$$

Optymalizacja liniowa – programowanie liniowe:

Przykład rozwiązania zadania optymalizacyjnego metodą **SIMPLEX**:

Na podstawie otrzymanych ilorazów kolumnowych wyznacza się brakujące elementy tablicy:

$$A'_{2A_1} = A_{2A_1} - r_{22}A_{3A_1} = 0 - 2 \times 0 = 0,$$

$$A'_{4A_1} = A_{4A_1} - r_{42}A_{3A_1} = 1 - 0 \times 0 = 1,$$

$$A'_{2A_5} = A_{2A_5} - r_{22}A_{3A_5} = 0 - 2 \times \frac{5}{2} = -5,$$

$$A'_{4A_5} = A_{4A_5} - r_{42}A_{3A_5} = 0 - 0 \times \frac{5}{2} = 0$$

Optymalizacja liniowa – programowanie liniowe:

Przykład rozwiązania zadania optymalizacyjnego metodą **SIMPLEX**:

Trzecia tablica simplexów:

c_i			2	0	3	0	0
Baza	c_b	b	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	2	2	1	0	0	1	0
A_5	0	0	0	-5	0	0	1
A_3	3	1	0	2	1	0	0
Wskaźniki		7	0	6	0	2	0

Optymalizacja liniowa – programowanie liniowe:

Przykład rozwiązania zadania optymalizacyjnego metodą **SIMPLEX**:

W dolnym wierszu (wskaźnikowym) nie ma już elementów ujemnych, a więc rozwiązano zadanie.

Wartość funkcji $f_1(x)$ jest równa 7, a wartości zmiennych $x_1=2$, $x_5=0$, $x_3=1$.

Pozostałe zmienne (nie występujące w kolumnie b ostatniej tablicy simplexów) są równe zero ($x_2=0$, $x_4=0$).

Zatem pomijając zmienne sztuczne otrzymujemy ostateczne rozwiązanie zadania dla funkcji $f(x)$, dla której poszukiwaliśmy minimum:

$$\min f(2,0,1) = -7$$