Ruch i położenie satelity

dr hab. inż. Paweł Zalewski, prof. AM
Centrum Inżynierii Ruchu Morskiego

Podstawy mechaniki ciał niebieskich:

Znajomość pozycji satelity w przyjętym systemie odniesienia w danym momencie czasu (epoce) jest założeniem dynamicznej metody pomiarowej. Uogólniając - dokładność ostatecznych wyników pomiarów satelitarnych jest uzależniona od dokładności modelu orbit satelitarnych, czego przykładem może być wyznaczenie współrzędnych przy pomocy GPS. Wymóg dokładności współrzędnych rzędu 1 cm może być spełniony przy znajomości orbit satelitarnych z analogiczną dokładnością.

W mechanice ciał niebieskich najprostszą formą ruchu jest ruch dwóch obiektów (zagadnienie dwóch ciał). Dla sztucznych satelitów Ziemi masę satelity w porównaniu z masą ciała centralnego – Ziemi – można pominąć. Zagadnienie (problem) dwóch ciał można sprecyzować jako:

Znając w danym czasie pozycje i prędkości dwóch cząstek o znanej masie, poruszających sie pod wpływem wzajemnej siły grawitacyjnej, wyznacz ich pozycje i prędkości w innym czasie.

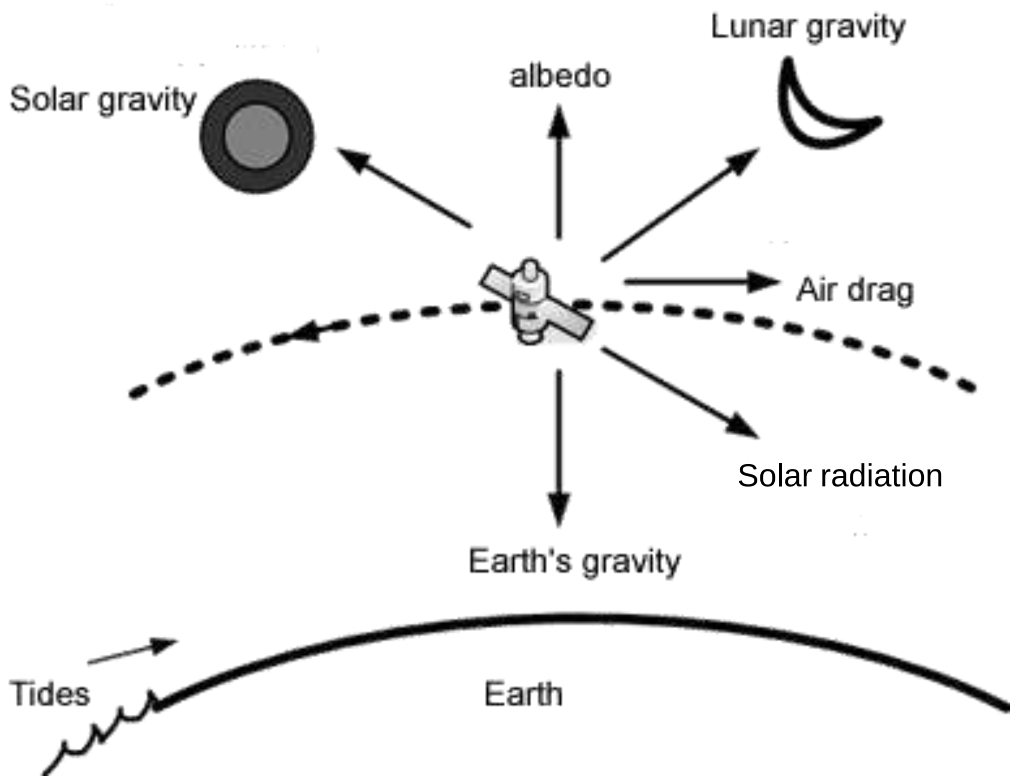
Podstawy mechaniki ciał niebieskich:

Przy założeniu, że oba obiekty są jednorodne i wytworzone pole grawitacyjne (potencjał grawitacyjny) odpowiada polu obiektu punktowego, ruch orbitalny w zagadnieniu dwóch ciał można opisać empirycznie za pomocą praw Keplera lub analitycznie za pomocą praw mechaniki Newtona (uproszczeniem jest pominięcie efektów relatywistycznych w prawach zachowania energii, pędu i momentu pędu).

Zagadnienie dwóch ciał jest jednym z nielicznych problemów mechaniki ciał niebieskich, który można przedstawić ogólnym modelem analitycznym. Inne problemy ruchu trzech lub więcej ciał niebieskich pod wpływem wzajemnej grawitacji mają jedynie modele szczególne.

Podstawy mechaniki ciał niebieskich:

Oprócz klasycznych perturbacji (zakłóceń zgodnego z prawami Keplera ruchu ciał niebieskich, spowodowanych obecnością innych ciał oraz oporem ośrodka) musi być także modelowany wpływ anomalii pola grawitacyjnego Ziemi (wynikających z jej niejednorodnej budowy i kształtu) oraz sił pozagrawitacyjnych. Umożliwił to rozwój komputerów przetwarzających duże ilości danych oraz implementowane w nich algorytmy numerycznego całkowania.



Pierwsze prawo Keplera:

Pierwsze prawo:

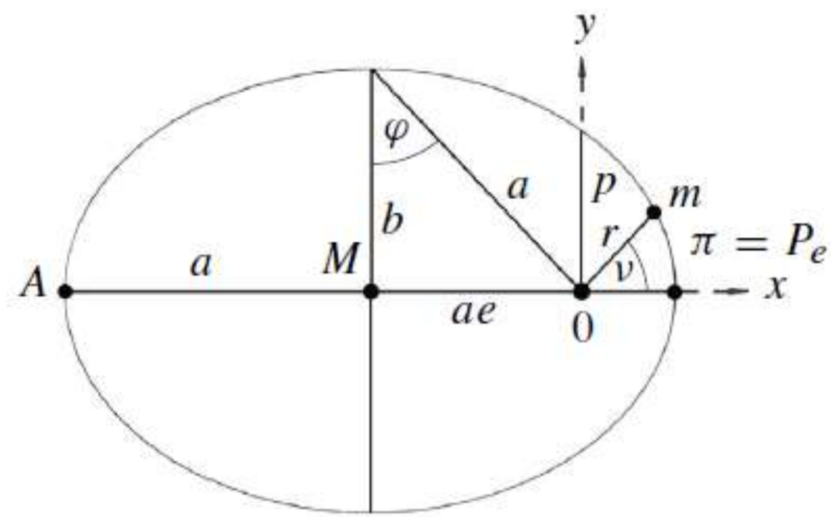
Orbita każdej planety jest elipsą ze Słońcem w jednym z jej ognisk. Stąd: Orbita SSZ jest elipsą z Ziemią w jednym z jej ognisk.

Oś wielka elipsy, $A\pi$, jest nazywana linią pomiędzy antypodami lub linią apsyd. Punkt orbitalny A, najdalszy od centrum mas systemu orbitalnego - 0, nazywany jest punktem apocentrum. Punkt π na orbicie, najbliższy centrum mas jest nazywany perycentrum.

Gdy w p. 0 znajduje się Słońce, A i π nazywane są aphelium (afelium) i peryhelium.

Gdy 0 odpowiada środkowi masy Ziemi, wtedy A i π nazywają się apogeum i perygeum.

Kąt ν jest tzw. anomalią prawdziwą.

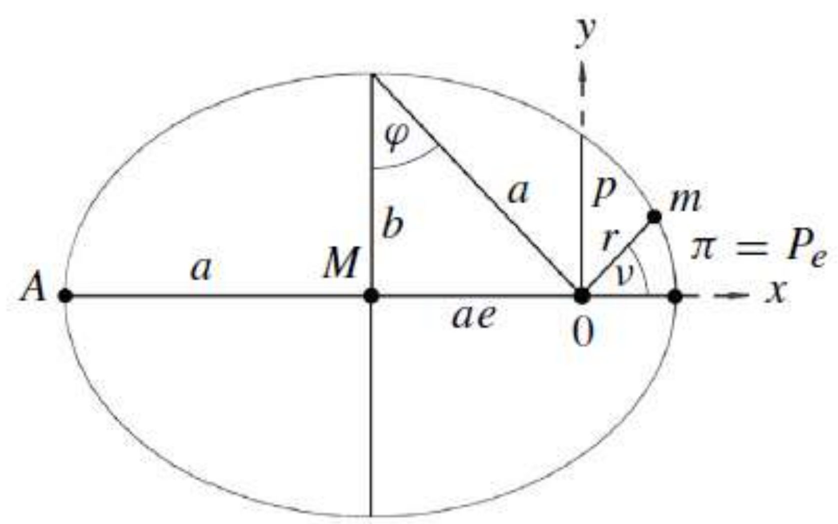


Pierwsze prawo Keplera:

Pierwsze prawo:

Orbita każdej planety jest elipsą ze Słońcem w jednym z jej ognisk. Stąd:
Orbita SSZ jest elipsą z Ziemią w jednym z jej ognisk.

Położenie masy punktowej m może być opisane współrzędnymi biegunowymi r, v, gdzie 0π jest jedną z osi odniesienia orbitalnego układu współrzędnych.



r – odległość masy punktowej m od centrum mas,

v – anomalia prawdziwa,

a – półoś wielka,

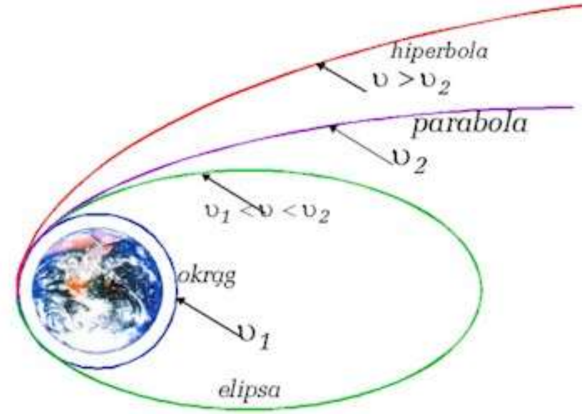
e – ekscentryczność liczbowa,

p – parametr elipsy.

Pierwsze prawo Keplera:

Ogólnie:

Pod wpływem siły centralnej ciała (satelity) poruszają się po tzw. krzywych stożkowych: elipsie, paraboli lub hiperboli.

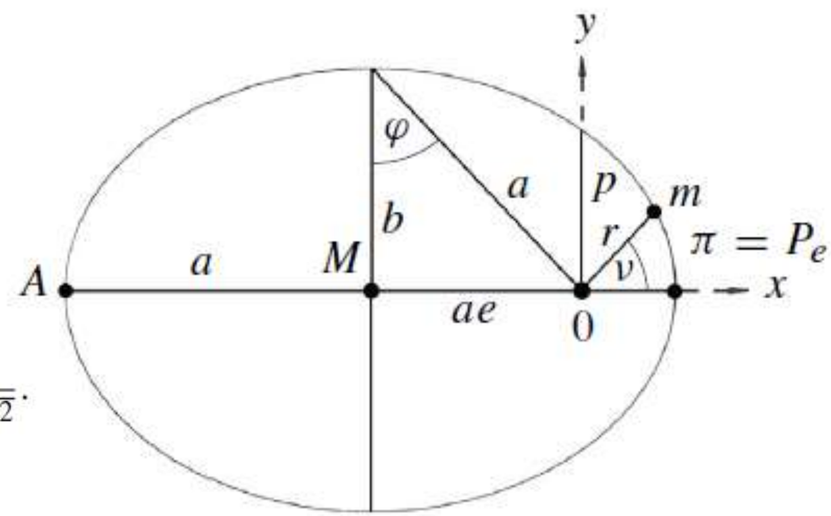


Równanie krzywej eliptycznej:

(dla $e = 0$ okrąg)

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}$$

$$p = \frac{b^2}{a}; \quad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}; \quad a = \frac{p}{1 - e^2}; \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}.$$



Dla kąta ekscentryczności φ:

$$e = \sin\varphi \qquad p = a\cos^2\varphi$$

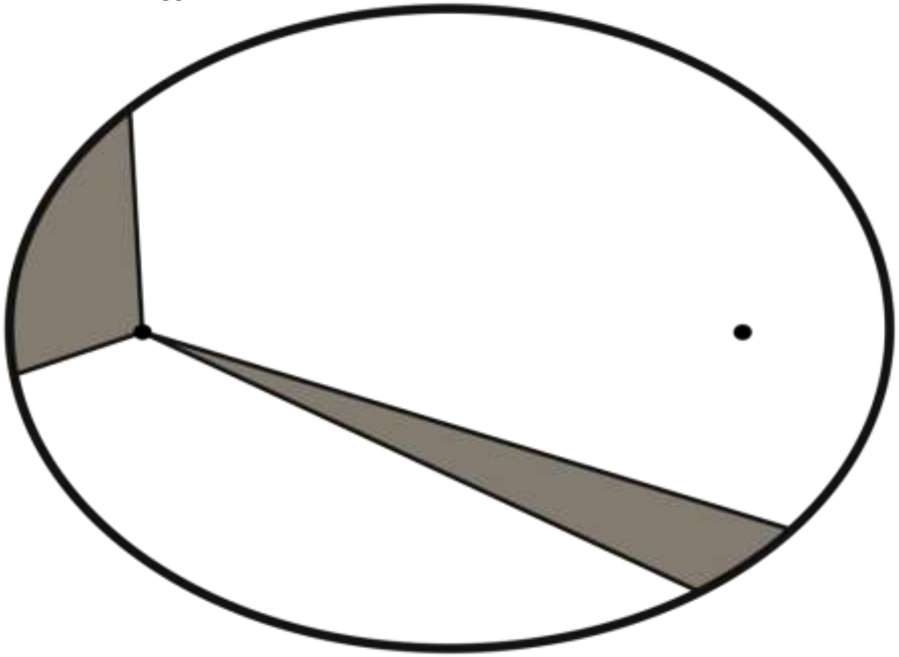
$$\sqrt{1 - e^2} = \cos\varphi \qquad b = a\cos\varphi = p\sec\varphi.$$

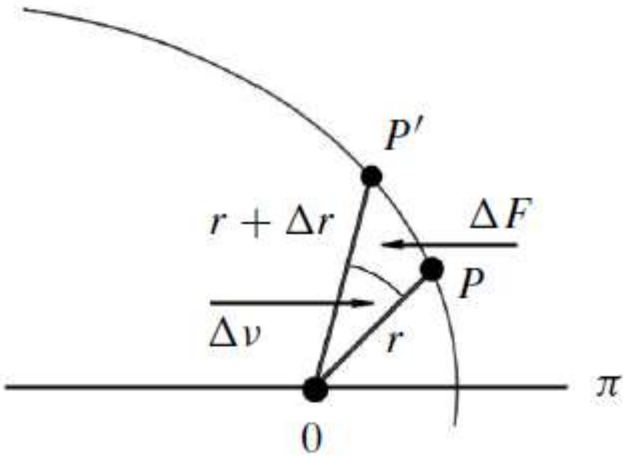
Drugie prawo Keplera:

Drugie prawo:

Linia łącząca Słońce z planetą (promień wodzący planety) zakreśla w równych odstępach czasu równe pola powierzchni wewnątrz orbity.

Na podstawie tego prawa można ustalić położenie satelity w funkcji r (odległości od ogniska orbity) i v (anomalii prawdziwej).



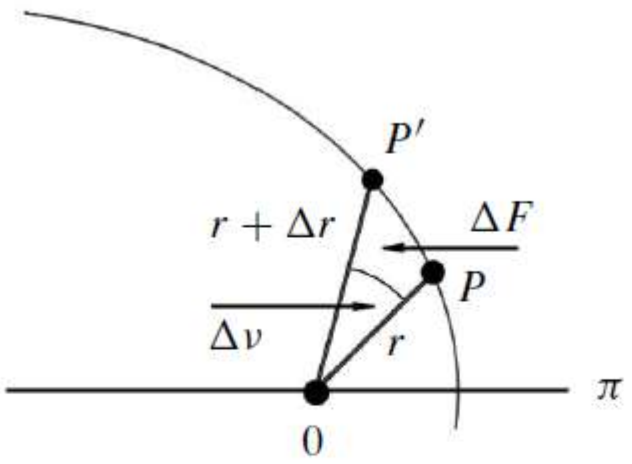


Drugie prawo Keplera:

Drugie prawo:

Linia łącząca Słońce z planetą (promień wodzący planety) zakreśla w równych odstępach czasu równe pola powierzchni wewnątrz orbity.

Według drugiego prawa obszar ΔF zakreślany przez r jest proporcjonalny do przedziału czasu Δt.



$$\Delta F \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta \nu$$

$$r^2 \Delta \nu \approx c \cdot \Delta t$$

$$r^2 \frac{d\nu}{dt} = c$$

c jest stałą prędkością polową.

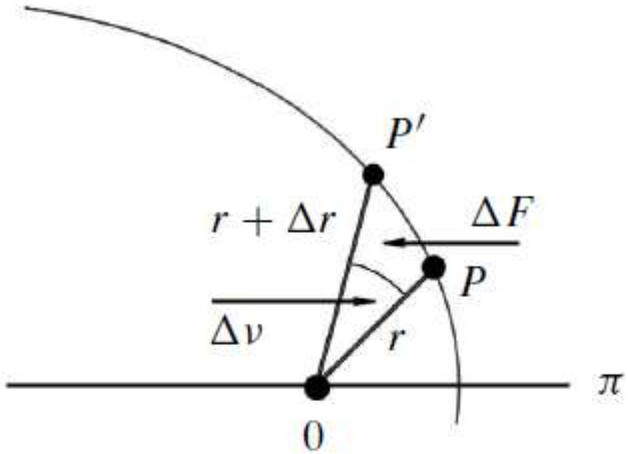
Drugie prawo Keplera:

Ogólnie:

W równych odstępach czasu promień wodzący satelity zakreśla stałą wartość pola powierzchni wewnątrz orbity.

Wprowadzając współrzędne prostokątne x, y:

$$x = r \cdot \cos \nu, \quad y = r \cdot \sin \nu, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$



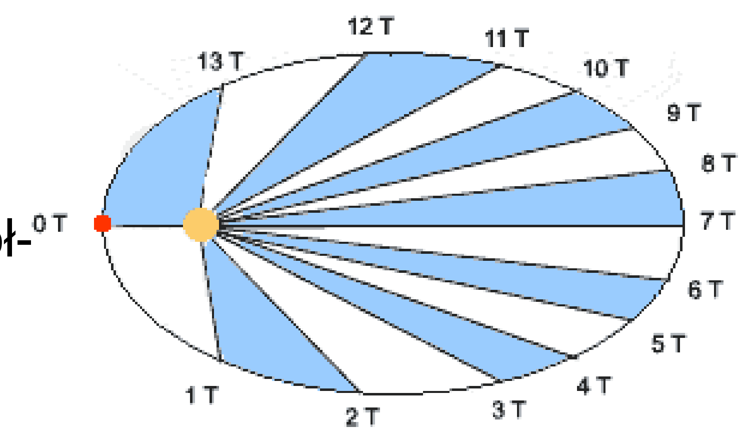
$$\tan \nu = \frac{y}{x}$$

Pochodna $\tan \nu$ po czasie:

$$\frac{\dot{\nu}}{\cos^2 \nu} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2}$$

Zastępując $\cos \nu$ i wprowadzając $r^2 \frac{d\nu}{dt} = c$ otrzymujemy prawo Keplera we współrzędnych kartezjańskich:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = c$$



T = any unit of time (hour, day, week, etc.)

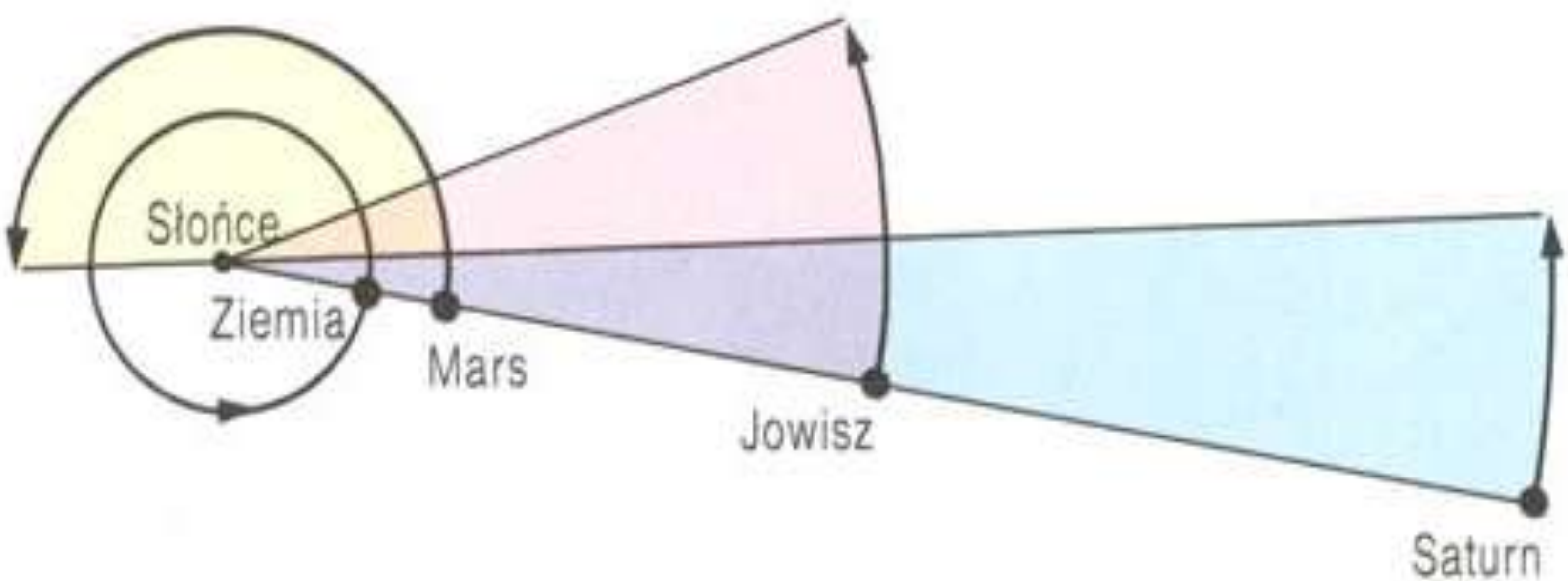
Trzecie prawo Keplera:

Trzecie:

Stosunek sześcianów większych półosi orbit planetarnych do kwadratów okresów obiegu planet wokół Słońca jest stały.

Ogólnie:

Kwadrat okresu obiegu satelity w polu grawitacyjnym jest proporcjonalny do sześcianu średniej odległości od przyciągającego ciała.



Trzecie prawo Keplera:

Trzecie:

Kwadrat okresu obiegu satelity w polu grawitacyjnym jest proporcjonalny do sześcianu średniej odległości od przyciągającego ciała.

W zapisie matematycznym oznacza to, że dla różnych satelitów P_i o okresach obiegu U_i, średnie prędkości kątowe:

$$n_i = 2\pi / U_i$$

$$\frac{a_i^3}{U_i^2} = \frac{C^2}{4\pi^2}$$

C jest stałą systemu planetarnego:

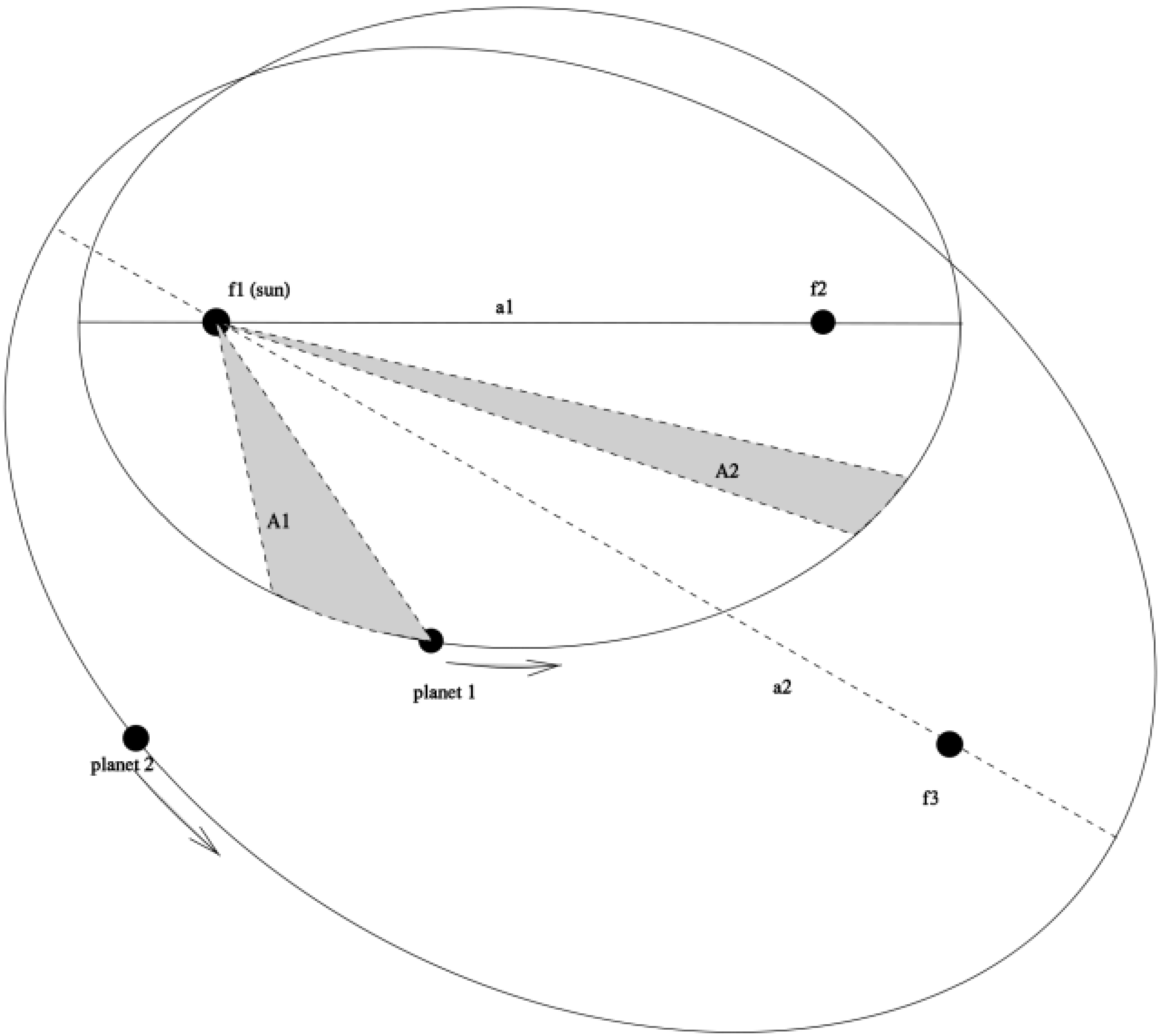
$$a_i^3 \cdot n_i^2 = C^2$$

Ogólnie:

$$\frac{a^3}{U^2} = \frac{k^2}{4\pi^2}(M + m) \qquad a^3 = \frac{G\left(M_S + m\right)}{4\pi^2} T^2$$

gdzie k jest uniwersalną stałą, a M, m są masami odpowiednich ciał.

Prawa Keplera:



Prawo grawitacji Newtona:

Każda cząstka materii we Wszechświecie przyciąga każdą inną cząstkę materii z siłą wprost proporcjonalną do iloczynu ich mas i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości między nimi:

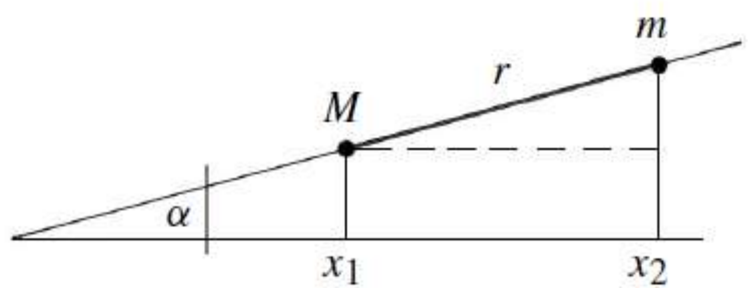
$$K = -G\frac{Mm}{r^2}$$

K jest wektorem wypadkowym wszystkich sił działających na masy M i m, a G jest stałą grawitacji:

$$G = (6.67259 \pm 0.00085) \cdot 10^{-11} \mathrm{m}^3 \mathrm{kg}^{-1} \mathrm{s}^{-2}$$

Prawo grawitacji Newtona:

W kartezjańskim układzie współrzędnych o osiach: x, y, z oraz kątach: α, β, γ pomiędzy kierunkiem siły a odpowiednimi osiami:



$$M\ddot{x}_1 = -G\frac{Mm}{r^2}\cos\alpha = -G\frac{Mm}{r^3}(x_1 - x_2).$$

$$x_2 - x_1 = x; \qquad y_2 - y_1 = y; \qquad z_2 - z_1 = z,$$

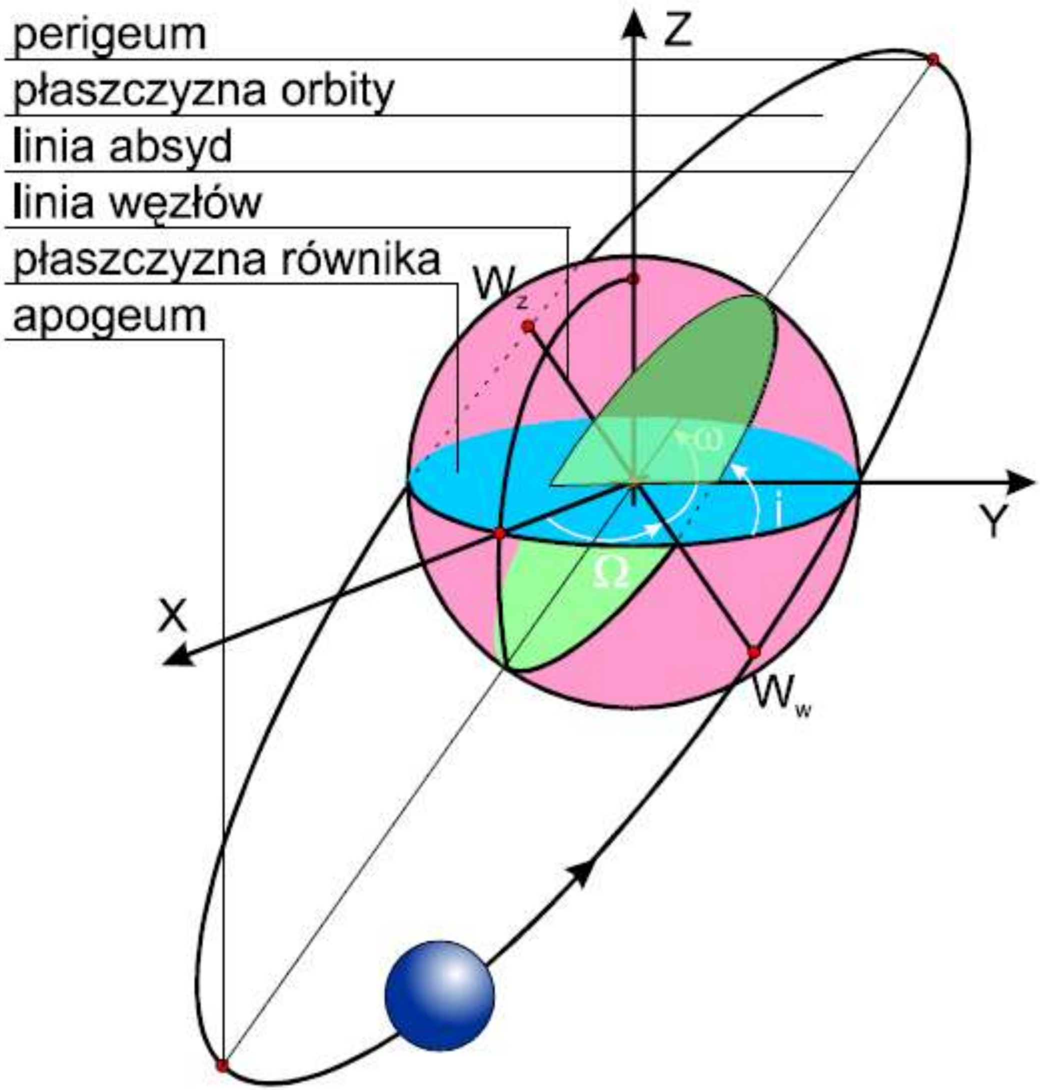
$$\ddot{x} = -G(M+m)\frac{x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -G(M+m)\frac{y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -G(M+m)\frac{z}{r^3}$$

Dla sztucznych satelitów Ziemi masa m może być pominięta. Podstawowe równanie ruchu satelity przyjmie więc postać:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}$$

gdzie r jest wektorem wodzącym SSZ wychodzącym z geocentrum.

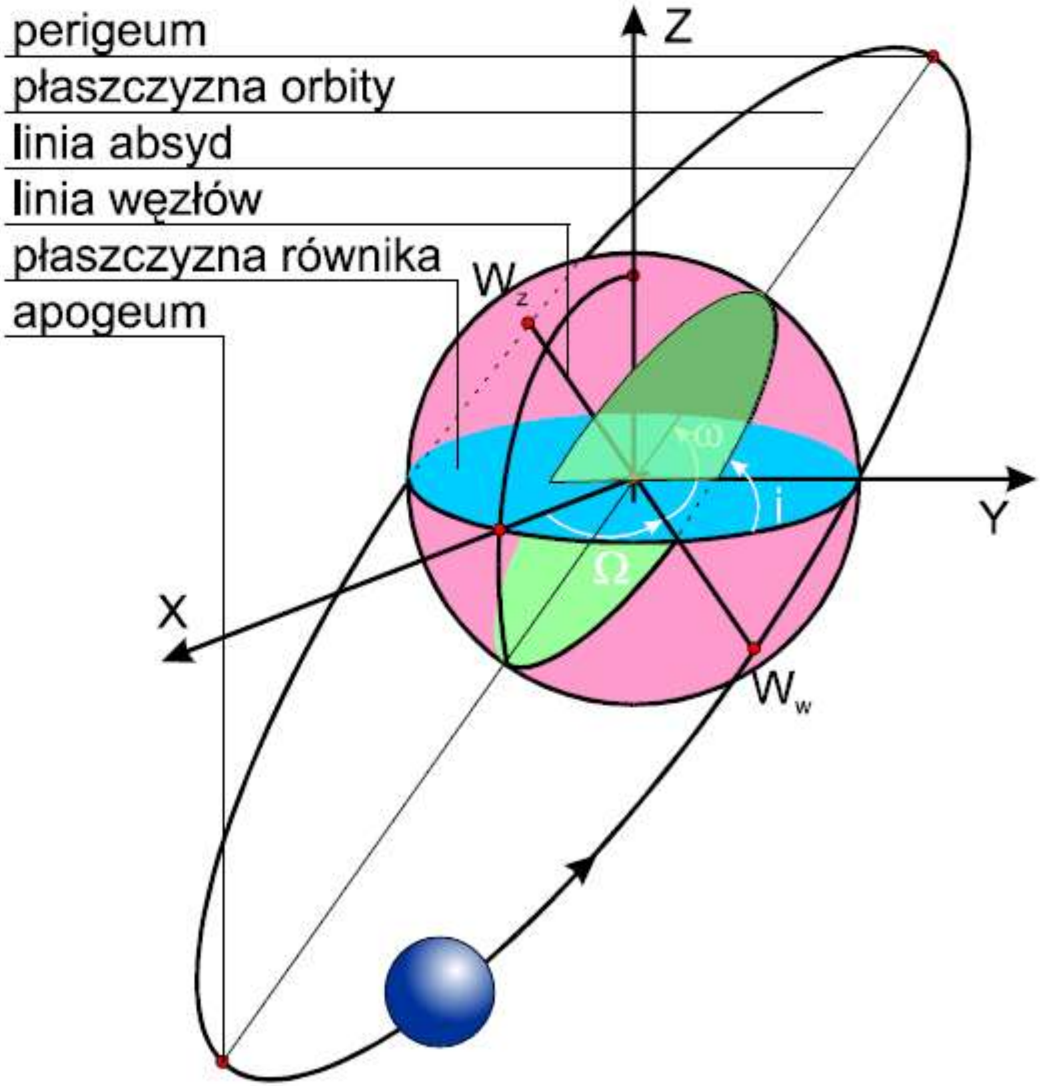
Parametry orbity:



Część wspólna płaszczyzn równika i orbity nazywana jest linią węzłów, którą wyznaczają punkt przejścia satelity z półkuli południowej na północną (węzeł wstępujący - W_w), oraz przeciwległy węzeł zstępujący - W_z.

Podobnie prosta wyznaczona przez punkty apogeum i perygeum określana jest jako linia absyd.

Parametry orbity:

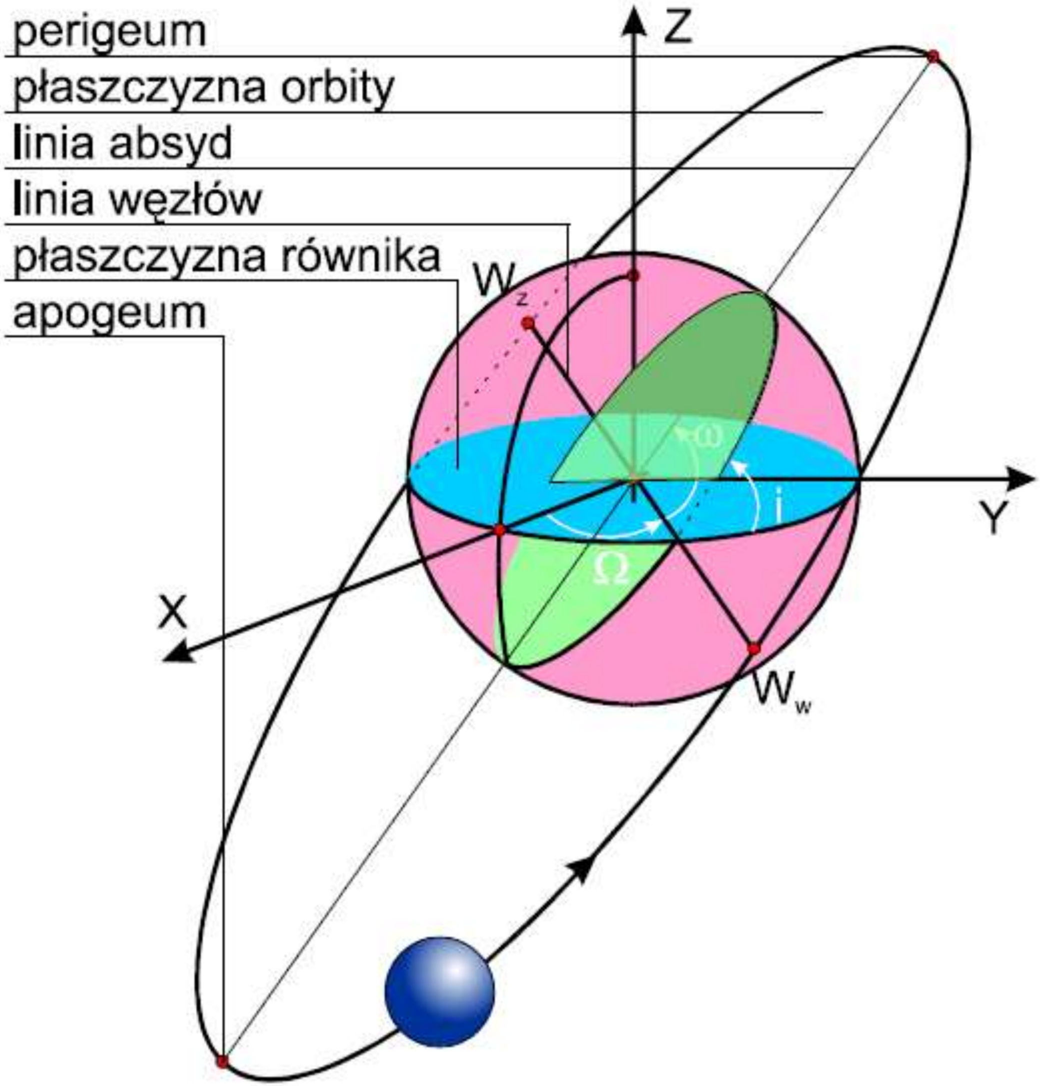


Elementy orbity:

Rektascensja (długość) węzła wstępującego (Ω) - mierzony przeciwnie do ruchu wskazówek umieszczonego na biegunie północnym zegara kąt jaki tworzy linia węzłów z osią X układu współrzędnych.

Inklinacja (nachylenie) orbity (i) - mierzony przeciwnie do ruchu wskazówek umieszczonego w węźle W_w zegara kąt jaki tworzy płaszczyzna równika z płaszczyzną orbity. Orbity, dla których $i = 0°$ nazywane są równikowymi, zaś te, dla których $i = 90°$ - biegunowymi.

Parametry orbity:



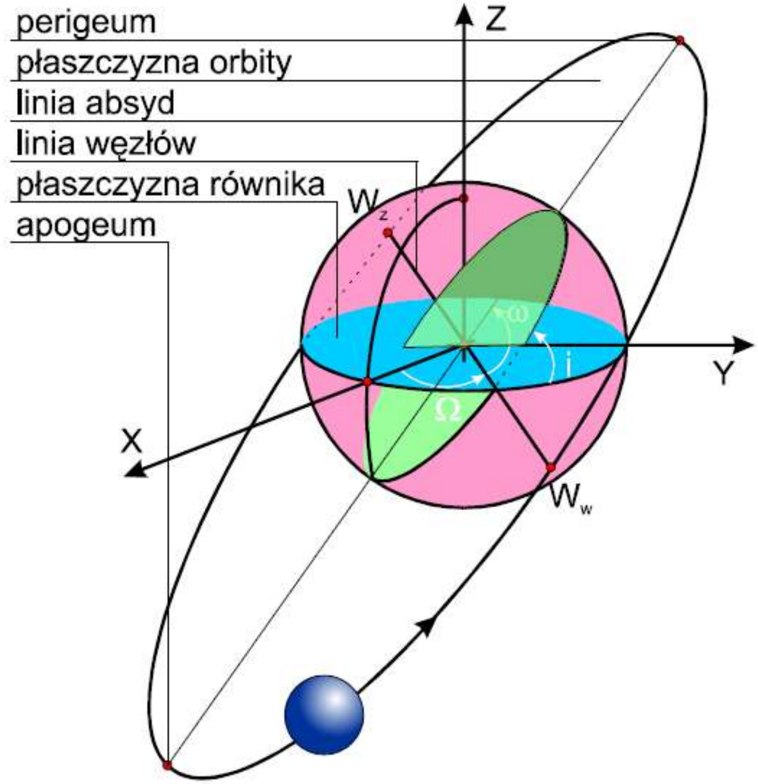
Elementy orbity:

Argument perygeum (ω) - mierzony w płaszczyźnie orbity kąt pomiędzy kierunkiem węzła W_w i kierunkiem perygeum.

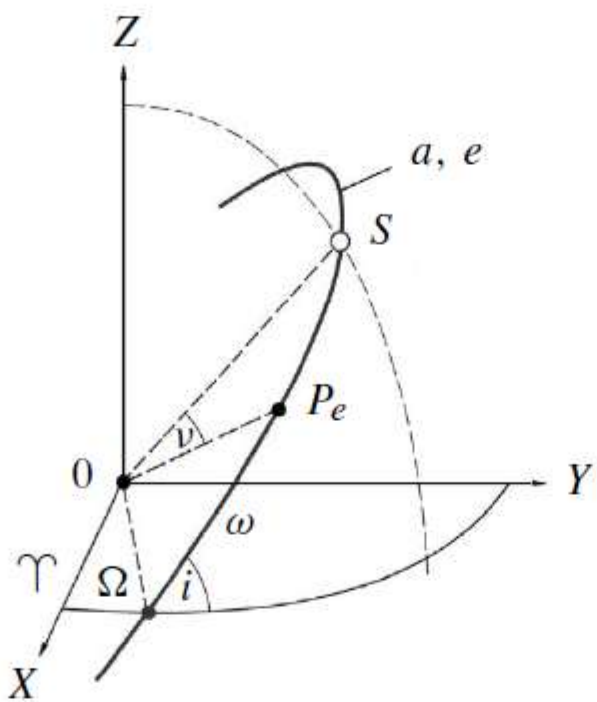
Czas przejścia przez perygeum (t_p) - chwila osiągnięcia przez satelitę punktu najbliższego Ziemi.

Duża półoś orbity (a) oraz mimośród orbity (e) - parametry elipsy orbitalnej.

Parametry orbity:

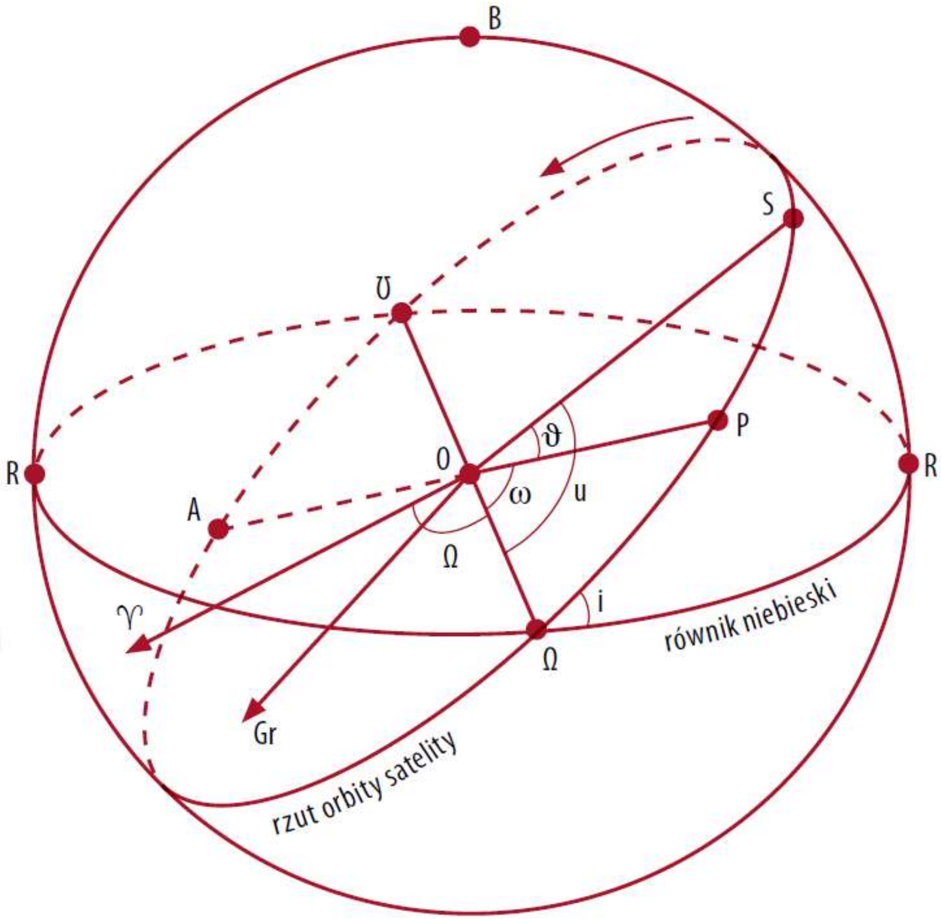


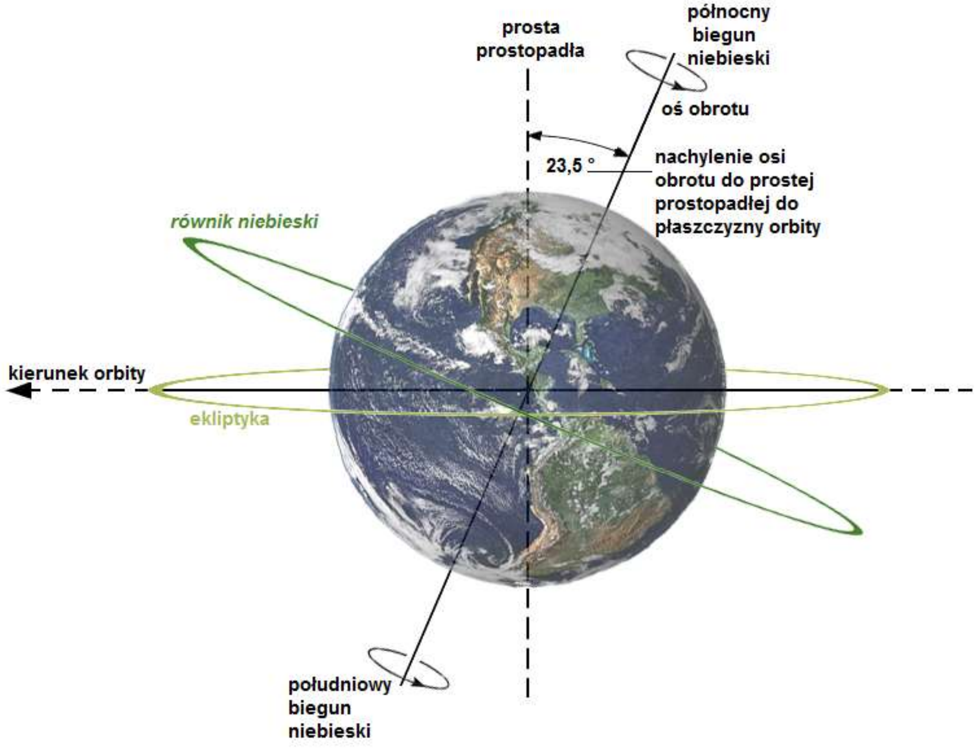
Ω - rektascensja (długość) węzła wstępującego
i - inklinacja (nachylenie) orbity
ω - argument perygeum
a - duża półoś orbity
e - mimośród (ekscentryczność) orbity
ν - anomalia prawdziwa



a semi-major axis
e numerical eccentricity
i orbit inclination
Ω right ascension of ascending node
ω argument of perigee
ν true anomaly

Parametry orbity:





B – biegun północny sfery niebieskiej
A – rzut apogeum orbity
P – rzut perigeum orbity
Ω – węzeł wstępujący orbity
Ʊ – węzeł zstępujący
ϑ – anomalia prawdziwa
ω – argument perigeum

u – argument szerokości
$u = \omega + \vartheta$
♈ – kierunek do punktu równonocy wiosennej (Barana)
Gr – kierunek do przecięcia południka Greenwich z równikiem

Prawa zachowania:

Za pomocą trzech zależności praw zachowania:

energii: $$E_M = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r}$$

momentu pędu: $$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$$

pędu: $$r = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1 + \frac{|B|}{GM}\cos\nu} \quad r = \frac{p}{1 + e\cos\nu}$$

możemy streścić wiedzę dotyczącą ruchu satelity po orbicie.

Prawa zachowania:

(1) Rodzina krzywych stożkowych (okrąg, elipsa, parabola, hiperbola) zawiera jedyne możliwe trajektorie orbity w zagadnieniu dwóch ciał.

(2) Ognisko orbity stożkowej znajduje się w środku ciała centralnego.

(3) Suma energii kinetycznej i potencjalnej podczas ruchu satelity po orbicie stożkowej nie zmienia się – pozostaje stała. Satelita zwalnia wraz ze wzrostem odległości od ciała centralnego i przyśpiesza wraz ze zmniejszeniem odległości od ciała centralnego.

(4) Ruch orbitalny satelity odbywa się na płaszczyźnie umieszczonej w układzie inercjalnym (układ odniesienia, względem którego każde ciało, niepodlegające zewnętrznemu oddziaływaniu z innymi ciałami, porusza się bez przyspieszenia tzn. ruchem jednostajnym prostoliniowym lub pozostaje w spoczynku).

(5) Moment pędu satelity względem ciała centralnego jest stały.

Prawa zachowania:

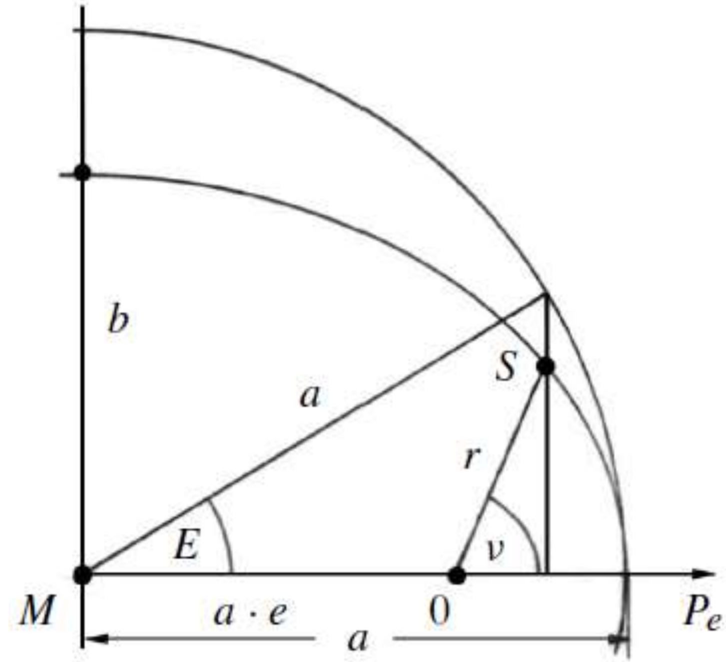
Charakterystyczne parametry krzywych stożkowych:

		circle	ellipse	parabola	hyperbola
eccentricity	e	0	$0 < e < 1$	1	$e > 1$
parameter	p	a	$a\,(1-e^2)$	p	$a\,(e^2-1)$
semi-major axis	a	a	a	∞	$a < 0$
semi-minor axis	b	a	$a\sqrt{1-e^2}$	—	$a\sqrt{e^2-1}$
pericenter distance	r_p	a	$a\,(1-e)$	$p/2$	$a\,(e-1)$
apocenter distance	r_a	a	$a\,(1+e)$	∞	∞

Całkowanie numeryczne praw zachowania:

Zależność pomiędzy anomalią prawdziwą ν a ekscentryczną (mimośrodową) E:

$$\tan \nu = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{\cos E - e}$$



- średnia prędkość kątowa:

$$n = \frac{2\pi}{T} \cong \sqrt{\frac{\mu}{a^3}},\ \mu = 3{,}986005 \cdot 10^{14}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2}$$

- średnia anomalia:

$$\overline{M} = E - e\sin E$$

W celu wyliczenia E z M powyższe równanie eliptyczne musi być rozwinięte w szereg Fouriera.

Obliczanie współrzędnych położenia satelity GPS:

Skorygowaną wartość średniej prędkości kątowej (ruchu średniego) satelity n_k otrzymamy dodając do n poprawkę transmitowaną w depeszy nawigacyjnej:

$$n_k = n + \Delta_n$$

Anomalię średnią odniesioną do momentu obserwacji:

$$M_k = M_0 + n_k(t - t_0) = M_0 + n_k t_k$$

Wartość anomalii ekscentrycznej E_k znajdujemy rozwiązując numerycznie (iteracyjnie) równanie:

$$M_k = E_k - e \sin E_k$$

Anomalię prawdziwą:

$$v_k = \tan^{-1}\left\{ \frac{\sqrt{1-e^2}\sin(E_k)}{\cos(E_k) - e} \right\}$$

Argument szerokości ϕ_k uzyskujemy w oparciu o wartość anomalii prawdziwej oraz argumentu perygeum ω:

$$\phi_k = v_k + \omega$$

Obliczanie współrzędnych położenia satelity GPS:

Korekcja argumentu szerokości:

$$\delta u_k = C_{us}\sin(2\phi_k) + C_{uc}\cos(2\phi_k)$$

Korekcja promienia wodzącego orbity satelity:

$$\delta r_k = C_{rs}\sin(2\phi_k) + C_{rc}\cos(2\phi_k)$$

Korekcja inklinacji (nachylenia) orbity satelity:

$$\delta i_k = C_{is}\sin(2\phi_k) + C_{ic}\cos(2\phi_k) + \mathrm{IDOT}\cdot t_k$$

Poprawiony o korekcję z perturbacji ruchu satelity argument szerokości:

$$u_k = \phi_k + \delta u_k$$

Poprawiony o korekcję promień wodzący orbity satelity:

$$r_k = a\left[1 - e\cos(E)\right] + \delta r_k$$

Poprawiona o korekcję inklinacja orbity satelity:

$$i_k = i_0 + \delta i_k$$

Obliczanie współrzędnych położenia satelity GPS:

Poprawiona o korekcję rektascensja (długość węzła wst.) orbity satelity:

$$\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \omega_e) t_k - \omega_e t_0$$

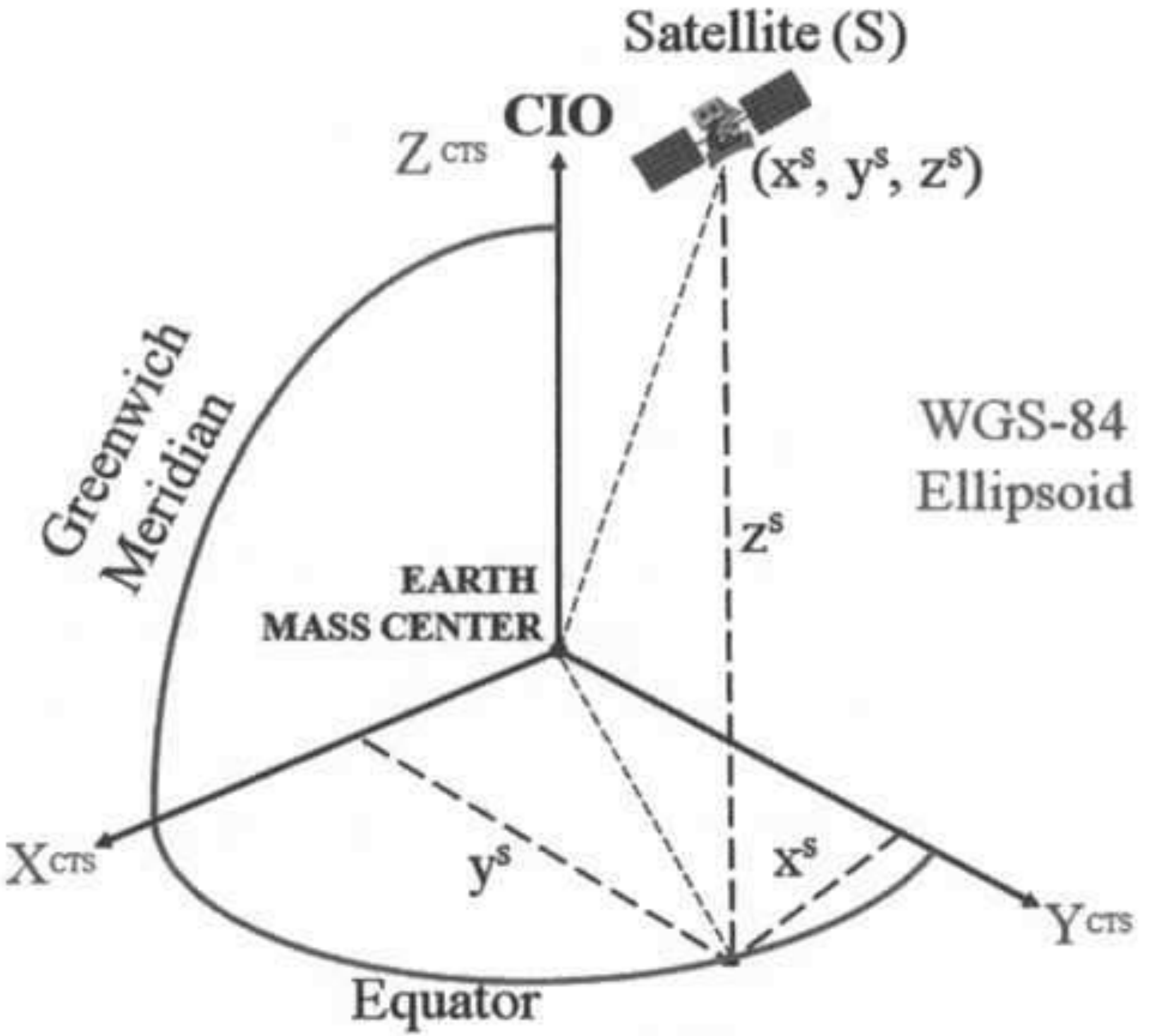
Współrzędne satelity w płaszczyźnie orbity (orbitalne):

$$\begin{cases} x'_k = r_k \cos(u_k) \\ y'_k = r_k \sin(u_k) \end{cases}$$

Geocentryczne współrzędne prostokątne położenia satelity (jcentrum fazowego anteny nadawczej) w przyjętym układzie odniesienia np. WGS84 lub GRS80:

$$\begin{cases} x_k = x'_k \cos(\Omega_k) - y'_k \cos(i_k) \sin(\Omega_k) \\ y_k = x'_k \sin(\Omega_k) - y'_k \cos(i_k) \cos(\Omega_k) \\ z_k = y'_k \sin(i_k) \end{cases}$$

Obliczanie współrzędnych położenia satelity GPS:



CIO - Celestial International Origin
CTS - Conventional Terrestrial System

Dane potrzebne do wyznaczenia położenia satelity GPS:

1) M_0 - anomalia średnia dla epoki danych efemerydalnych,

2) Δ_n - poprawka ruchu średniego,

3) e - mimośród orbity,

4) a - duża półoś elipsy lub jej pierwiastek,

5) Ω_0 - rektascensja węzła wstępującego orbity,

6) i_0 - inklinacja orbity,

7) ω - argument perygeum,

8) $\dot{\Omega}$ - zmiana rektascensji w funkcji czasu,

9) IDOT - zmiana inklinacji w funkcji czasu,

10) C_{uc} - korekta argumentu szerokości (cos),

11) C_{us} - korekta argumentu szerokości (sin),

12) C_{rc} - korekta promienia wodzącego satelity (cos),

13) C_{rs} - korekta promienia wodzącego satelity (sin),

14) C_{ic} - korekta inklinacji (cos),

15) C_{is} - korekta inklinacji (sin),

16) t_0 - czas odniesienia danych efemerydalnych,

17) IODE - wiek danych efemerydalnych.