

Metrologia: obliczenia na liczbach przybliżonych



dr inż. Paweł Zalewski
Akademia Morska w Szczecinie

Cyfry znaczące – reguły Kryłowa-Bradisa:

Przy korzystaniu z przyrządów z podziałką przyjęto zasadę, że **wartość najmniejszej działki skali odpowiada dokładności odczytania** (tzw. „uchybowi” lub „rozdzielczości”) przyrządu. Uchyb przyrządów z odczytem cyfrowym podawany jest przez producenta w dołączonej specyfikacji.

Przy zapisywaniu wyników pomiaru, jak również w dalszych obliczeniach z zastosowaniem tych pomiarów obowiązuje zasada, że **tylko ostatnia cyfra wyniku jest cyfrą niepewną**.

Tak więc wynik pomiaru masy za pomocą wagi o dokładności odczytu 1 g należy podać jako: „1000 g” lub: „ $1,000 \times 10^3$ g”, a nie: “1 kg”.

Cyfry znaczące:

Zapis wyniku np. ważenia zależy od przyjętej jednostki pomiaru. Jeśli zważono masę 23 mg (z dokładnością do 0,1 mg), to wynik ten można zapisać jako:

23,0 mg

0,0230 g

0,0000230 kg

Dla uniezależnienia postaci zapisu wyniku od przyjętej jednostki pomiaru (mg, g, kg), wprowadzono pojęcie **cyfr znaczących**.

W analizie objętościowej błąd odczytu objętości wynosi przeciętnie ok. 0,1%. 0,1% oznacza różnicę (błąd) 1 jednostki na 1000 jednostek (w przybliżeniu również na 999 jednostek).

Podanie wyniku z dokładnością odczytu do 0,1% - oznacza więc zapisanie go z rozdzielczością wynikającą z wielkości wyniku np. dla wyniku 2561 0,1% to 2,561, czyli wynik podajemy z czterema cyframi znaczącymi: 2561 ± 3 zaokrąglając tolerancję.

Cyfry znaczące:

Zera dziesiętne tuż po przecinku ułamka dziesiętnego nie są miejscami znaczącymi jeżeli liczbą przed przecinkiem jest „0”!

Przykład zapisów wyników pomiarów:

245 (trzy cyfry znaczące)

0,0245 (trzy cyfry znaczące)

0,00205000 (sześć - trzy cyfry znaczące)

1 (jedna cyfra znacząca)

10 (dwie lub jedna cyfra znacząca)

1,000 (cztery - jedna cyfra znacząca)

Cyfry znaczące:

Dla liczby np. 1100 pojawia się wątpliwość, czy ostatnie dwa zera są cyframi znaczącymi, czy też wynikają one z przyjętej jednostki pomiaru.

W takiej sytuacji stosuje się zapis w postaci iloczynu potęgowego, przy czym pierwszy czynnik jest liczbą z zakresu: 1-10.

Jeśli wynik ten zmierzono z dokładnością odczytu 1 jednostki, to podać należy go z dokładnością do czterech cyfr znaczących: $1,100 \times 10^3$, jeśli zaś z dokładnością do stu jednostek – z dokładnością do dwóch cyfr znaczących: $1,1 \times 10^3$. Dla czterech cyfr znaczących również można zaznaczyć na końcu kropkę dziesiętną w postaci „1100.”.

Zaokrąglanie:

„Zaokrąglić”, znaczy: usunąć zbędne cyfry znaczące, ale jednocześnie ostatnią pozostałą cyfrę pozostawić niezmienną (gdy usuwane cyfry znaczące są mniejsze niż „5”) lub powiększyć o „1” - gdy usuwane cyfry znaczące są większe lub równe „5”.

Prawdopodobieństwo, że trzeba będzie odrzucić tylko jedno miejsce dziesiętne, a na tym miejscu będzie akurat piątka - jest bardzo małe. A jeśli po piątce będą jeszcze jakiegokolwiek cyfry (różne od zera) - to ostatnią pozostawioną cyfrę zaokrągla się zawsze „w górę”. Bo jest to mniejszy błąd, niż przy zaokrągleniu „w dół”.

$$12,34999 \approx 12,3$$

$$12,35001 \approx 12,4$$

$$12,35000 \approx 12,4$$

$$12,45000 \approx 12,4$$

Dodawanie i odejmowanie liczb przybliżonych:

Wynik powinien zawierać tylko jedną (ostatnią) cyfrę niepewną (tyle znaków dziesiętnych ile ma ich liczba przybliżona o najmniejszej ilości znaków dziesiętnych).

W przykładzie cyfra niepewna jest zapisana pogrubioną kursywą.

$$\begin{array}{r} 234,4 \\ + 71,36 \\ = 305,76 \end{array}$$

Nie należy podawać dwóch cyfr niepewnych w wyniku: jeśli nie jesteśmy pewni dziesiątych części wyniku, to po co podawać części setne?

Ostatecznie wynik powinien być podany w postaci: **305,8**.

Natomiast wynikiem dodawania: $3,4 + 0,0234567$ jest: 3,4

Mnożenie i dzielenie liczb przybliżonych:

Wynik powinien zawierać tylko tyle cyfr znaczących, ile ma ich najmniej **dokładny czynnik** (w pomiarach wieloetapowych: etap najmniej dokładny decyduje o łącznej dokładności całego ciągu pomiarów), czyli liczba przybliżona o najmniejszej ilości cyfr znaczących.

Przykłady:

$$\begin{array}{r} 234,4 \text{ cm} \\ \times 0,52 \text{ cm} \\ \hline = 121,888 \text{ cm}^2 \end{array}$$

Podać należy tylko dwie cyfry znaczące: 120 cm^2

$$12,34 : 123,456 = 0,0999546... \approx 0,09995$$

Potęgowanie i pierwiastkowanie liczb przybliżonych:

Przy podnoszeniu do kwadratu lub sześćcianu należy w wyniku zachować tyle cyfr znaczących ile ich zawiera potęgowana liczba przybliżona.

Przykład:

$$3,125^3 = 30,5175... \approx 30,52$$

Przy wyciąganiu pierwiastka należy w wyniku zachować tyle cyfr znaczących ile ich zawiera liczba pierwiastkowana:

Przykład:

$$\sqrt{3,125} = 1,76776... \cong 1,768$$

Kombinacja działań na liczbach przybliżonych:

Problemem może być obliczanie średniej (lub innej statystyki) wyników pomiarów tego samego obiektu:

63,75 63,85 63,81

Średnia wynosi: 63,8033(3)

Ponieważ jednak seria pomiarów dotyczy tego samego obiektu i różnica występuje już na pierwszym miejscu dziesiętnym po przecinku, zatem już to miejsce jest niepewne i wynik powinien być podany jako: 63,8

Przy obliczaniu stadiów pośrednich rachunku należy brać zawsze o jedną cyfrę znaczącą więcej w stosunku do zasad podanych (zaokrąglać do danych o najmniejszej ilości znaków dziesiętnych plus dodatkowa jedna cyfra).

Zupełnie poprawnie, do rozwiązywania podobnych problemów należy stosować reguły rachunku statystycznego.